Strategie und Taktik im Mathematikunterricht am Beispiel „Ungleichungen“

Robert Müller, Wien

0. Einleitung

Nur wenige Jahre nach dem Lateinlehrer gerät nun auch der Mathematiklehrer im Zuge von gesellschaftlichen Entwicklungen - Stichwort: Autonomie - zunehmend unter Druck, seinen Unterricht gegenüber Schülern und Eltern, Kollegen und Schulaufsicht argumentieren, ja rechtfertigen zu müssen.

Dieser Vortrag soll anhand verschiedener Lösungsstrategien für algebraische Ungleichungen mit einer Variablen (9.Schulstufe) zeigen, wie selbst in dem allgemein als "trocken" und "anwendungsfern" bewerteten Thema "Ungleichungen" viele allgemeine Lehrziele verwirklicht werden könn(t)en.

Das waren ursprünglich die Motive und Ziele für diesen - bereits lange geplanten - Vortrag zur Fachdidaktik. Populistische Forderungen gewisser "Experten", die unter marktschreierischen Aufmachern wie "Endlich Stoffentrümpelung" oder "Sieben Jahre Mathematik sind genug" (in den Medien) eine meist peinlich oberflächliche und polemische Behandlung erfahren haben, verleihen meinem Vortrag nunmehr eine immens aktuelle Dimension, der ich mich weder entziehen kann noch entziehen will.

Um stilistisch bei diesen Forderungen zu bleiben:
Hand aufs Herz: Haben Sie in der Schule Ungleichungen lösen müssen? Haben Sie schon irgendwann einmal "Ungleichungen" im Alltag gebraucht? Na also! "Ungleichungen" sind wirklich nur Ballast, den man ohne Verlust abwerfen könnte! Unsere Kinder sollten besser alltagsnahe, offene, projekthafte Fragestellungen im Unterricht behandeln, statt sich mit Ungleichungen bis hin zu Bruch- und Betragsungleichungen zu quälen - noch dazu, wo doch der Computer diese ohnehin viel schneller und besser lösen kann!

Legt man (gefährlich vertrauensvoll) ausschließlich Wert auf das Ergebnis - was für den Unterricht m.E. eher untypisch ist, so kann man tatsächlich in vielen Fällen den Computer die Ungleichung lösen lassen. Z.B. erhält man aus

$$\text{SOLVE}\left[\frac{x+6}{2\cdot x-3} \geq 2,\ x\right]$$

$$\left[\frac{3}{2} \leq x \leq 4\right]$$

Allerdings bleibt dann völlig unklar, wie diese Lösung zustande kam, wieweit man ihr trauen kann (man kann nicht, weil 3/2 keine Lösung ist!), und wie man in jenen Fällen vorgehen soll, in denen der Computer "streikt"!

Die kaum schwierigere Bruchungleichungskette

$$5 > \frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} \geq 2$$

oder die quadratische Betragsungleichung

$$\left| x^2 - 3 \cdot x \right| > 1.75$$

oder selbst die Betragsungleichung

$$|x - 3| < 2$$

werden von (der an jeder AHS Österreichs verfügbaren Version 3.0 von) DERIVE ersichtlich nicht unmittelbar gelöst! Man erhält vielmehr

$$\mathrm{SOLVE}\left[5 > \frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} \geq 2,\ x\right]$$

$$\left[5 > \frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} \geq 2\right]$$

bzw.

$$\mathrm{SOLVE}(\left| x^2 - 3 \cdot x \right| > 1.75,\ x)$$

$$\left[|x \cdot (x - 3)| > \frac{7}{4} \right]$$

bzw.

$$\mathrm{SOLVE}(|x - 3| < 2,\ x)$$

$$[-2 < x - 3 < 2]$$

Die obige Aussage, daß der Computer ohnehin Ungleichungen viel besser und schneller löst, kann also in dieser Allgemeinheit nicht aufrecht erhalten werden.

Betrachten wir weiters ein Beispiel für eine sogenannte "alltagsnahe" Aufgabe:

`Herr Müller, ein aus Prinzip vorschriftsmäßig fahrender Autolenker, fährt mit seinem PKW auf der Autobahn von Wien nach Salzburg (300 km). Unterwegs will er eine halbe Stunde Pause machen. Wieviel Stunden dauert die Fahrt?`

Diese durchaus nicht komplizierte Aufgabe führt bereits auf eine (Doppel-)Bruch-Ungleichungskette für die Gesamtzeit t, nämlich

$$40 \le 300/(t-1/2) \le 130$$

Übergeben wir diese Aufgabe wiederum DERIVE zum Lösen:

$$\text{SOLVE}\left[40 \le \frac{300}{t - \frac{1}{2}} \le 130,\ t\right]$$

$$\left[40 \le \frac{600}{2\cdot t - 1} \le 130\right]$$

Ersichtlich löst der Computer nur den "Doppelbruch" auf, nicht jedoch die Ungleichung!

Erst die Auftrennung der Ungleichungskette durch den Benutzer in die zwei Ungleichungen liefert über die folgenden Teillösungen

$$\text{SOLVE}\left[40 \le \frac{300}{t - \frac{1}{2}},\ t\right]$$

$$\left[\frac{1}{2} \le t \le 8\right]$$

und

$$\text{SOLVE}\left[\frac{300}{t - \frac{1}{2}} \le 130,\ t\right]$$

$$\left[t \le \frac{1}{2},\ t \ge \frac{73}{26}\right]$$

die Gesamtlösung L = [73/26 ; 8]. Die Fahrt dauert inklusive Pause mindestens 73/26 Stunden und höchstens 8 Stunden.

Die logische Strukturierung und die mengentheoretische Verknüpfung der Teillösungen zur Gesamtlösung werden ersichtlich nicht "ohnehin vom Computer erledigt", sondern bleiben dem Benutzer überlassen!

Abgesehen davon ergeben sich im Zuge des Lösens einige theoretische Fragen, die über den bloßen "Alltagsbezug" hinausgehen: Wieso ist es zulässig, mit der mittleren Geschwindigkeit zu operieren, obwohl dies doch nicht dem realen Fahrverhalten entspricht? Wieso treten in der zweiten Teillösung auch negative Fahrzeiten als Lösung auf, oder wieso tritt in der ersten Teillösung 1/2 als Lösung auf, obwohl man dann offenbar in der Fahrzeit 0 die 300 km lange Strecke zurücklegt? Plötzlich und ungefragt kommt "unendlich" ebenso wie die so "unschöne" Bruchzahl 73/26 ins Spiel, obwohl uns doch von vielen Seiten immer wieder vorgesagt wird, daß außer Halbe, Viertel und Achtel sowie Zehntel und Hundertstel im Alltag praktisch nichts vorkommt.

Ersichtlich fragt uns der "Alltag" nicht, was vom Lehrplan erlaubt ist und was nicht (mehr - weil bereits entrümpelt)!

Ersichtlich führen offene Aufgaben des "Alltags" sehr leicht zu Problemen, denen man dann nur "ad hoc" - somit wenig systematisch, didaktisch ungeplant und letztendlich ineffizient - zu Leibe rücken kann.

Entrümpelung und offene Aufgabenstellungen zu fordern ist leicht (und im Ansatz auch nicht unberechtigt)! Nicht leicht ist jedoch die konkrete Umsetzung. Diese bedarf einer eingehenden und gewissenhaften Beschäftigung mit der Materie. Dabei muß neben den Stoffinhalten selbst deren (möglicher) strategischer Stellenwert im gesamten Curriculum samt den daran geknüpften allgemeinen Lehr- und Lernzielen gewürdigt werden, immer unter Berücksichtigung der (verantwortungs-)bewußt zur Verfügung gestellten Arbeitsmittel. Im folgenden soll dies paradigmatisch für die vielerorts zur Entrümpelung freigegebenen "komplizierten" Ungleichungen unter Verwendung von DERIVE angedeutet werden.

Gerüst für diese Überlegungen sind die folgenden vier - wie ich meine: fundamentalen -Strategien zum Lösen von "komplizierten" Ungleichungen:

1) Äquivalenzumformungen
2) Logische Strukturierung mittels Faktorisierens
3) Graphisches Lösen
4) Ausgleichen mittels Schlupfvariabler

1) Die Strategie der Äquivalenzumformungen

Ziele: Transfer des Vorgehens bei Gleichungen auf Ungleichungen
Algebra üben und vertiefen

Betrachten wir die Ungleichung

$$\frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} \geq 2$$

Während bei der zugehörigen Gleichung die Multiplikation mit dem Nenner von DERIVE anstandslos ausgeführt wird

$$\left[\frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} = 2\right] \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$x + 6 = 4 \cdot x - 6$$

ergibt sich für die Ungleichung ein überraschendes Ergebnis:

$$\left[\frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} \geq 2\right] \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$\left[\frac{3 \cdot (x + 6)}{3 - 2 \cdot x} \leq -6\right] + x \cdot \left[\frac{2 \cdot (x + 6)}{2 \cdot x - 3} \geq 4\right]$$

Auch die üblichen Versuche der Schüler mit EXPAND oder FACTOR führen den Ausdruck nicht in die erwartete Ungleichung über.

Die händische Eingabe der nach Multiplikation mit 2x-3 erwarteten Ungleichung führt zu

$$\text{SOLVE}(x + 6 \geq 2 \cdot (2 \cdot x - 3),\ x)$$

$$[x \leq 4]$$

Der Schüler, der diese Lösung doppelt unterstreicht, irrt! Wie eine Kontrolle zeigt, ist x=0 sicher keine Lösung der gegebenen Bruchungleichung. Ach ja: Die (stillschweigende) Voraussetzung 2x-3>0 wurde DERIVE nicht mitgeteilt. Rechnen wir also nochmals unter Berücksichtigung von

$$x :\in \text{Real } (3/2,\ \infty)$$

$$\text{SOLVE}(x + 6 \geq 2 \cdot (2 \cdot x - 3),\ x)$$

$$[x \leq 4]$$

Das Ergebnis stimmt wiederum nicht mit der richtigen Teillösung]3/2;4] überein!

Analog erhält man im Fall 2x-3<0

$$x :\in \text{Real } (-\infty,\ 3/2)$$

$$\text{SOLVE}(x + 6 \leq 2 \cdot (2 \cdot x - 3),\ x)$$

$$[x \geq 4]$$

obwohl diese Teillösungsmenge leer sein müßte!

Ersichtlich löst der Computer nicht ohnehin und von selbst seine Aufgaben richtig, sondern bedarf der "Führung" und "Kontrolle" durch einen Benutzer, der aufgrund seiner Schulung und Intelligenz Fallunterscheidungen und Algebra sowohl formal richtig als auch taktisch geschickt einzusetzen vermag.

Typische Fehler wie z.B.

$-x>3 \Rightarrow x>-3$ (kein Umdrehen des Relationszeichens analog zur Gleichungen)

$-x>3 \Rightarrow x<3$ (nur Umdrehen des Relationszeichens analog zu $ax>b \mid /a$ mit $a<0 \Rightarrow x<b/a$, wo ja auch kein Vorzeichenwechsel sichtbar wird)

$2/(x-1)>0 \Rightarrow 2>0$ w.A. , d.h. L=R (mögliche Fälle und Voraussetzung $x>1$ werden nicht berücksichtigt)

gehören ausgemerzt, nicht durch Entrümpeln vermieden! Unbehandelte Krankheiten bleiben eine ständige Gefahr!!

Stellt man die Konsolidierung algebraischer Kenntnisse und Fertigkeiten in den Mittelpunkt, so ist die Strategie der Äquivalenzumformung angebracht. Der Computereinsatz ist dabei aus didaktischer Sicht m. E. mehr hinderlich als nützlich.

2) Die Strategie des logischen Strukturierens mittels Faktorisierens

Ziele: Logische Strukturierung und Standardisierung von Ungleichungen
Logik und Mengenlehre üben und vertiefen
Modularisierung (Faktorisierung, Partialbruchzerlegung) vorbereiten

Zunächst formt man zu einer Ungleichung um, bei der auf der einen Seite 0, auf der anderen Seite ein Bruch steht:

$$\frac{x+6}{2\cdot x-3} - 2 \geq 0$$

$$\frac{3\cdot(4-x)}{2\cdot x-3} \geq 0$$

Bei der Umformung ist DERIVE hilfreich, obgleich es den unnötigen Faktor 3 nicht von sich aus unterdrückt.

Angelpunkt der folgenden Fallunterscheidung sind die Vorzeichenregeln, in unserem Fall "+" / "+" = "+" und "-" / "-" = "+":

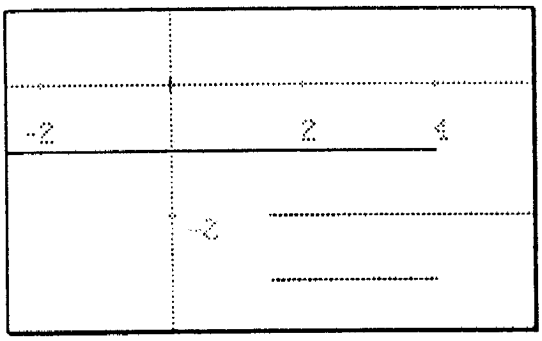
1.Fall: $4-x \geq 0 \wedge 2x-3>0$ $\quad\vee\quad$ 2.Fall: $4-x \leq 0 \wedge 2x-3<0$

$x \leq 4 \quad x>1,5$ $\qquad\qquad$ $x \geq 4 \quad x<1,5$

$L_1=]1,5;4]$ $\qquad\qquad$ $L_2=\{\}$

$$L=L_1 \cup L_2=]1,5;4]$$

Bei diesen Fallunterscheidungen ist das Aufzeichnen der auftretenden Intervalle durch die Schüler meiner Erfahrung nach eine unverzichtbare Hilfe,



nicht jedoch der Computer:

$3\cdot(4 - x) \geq 0$ AND $2\cdot x - 3 > 0$

false

$3\cdot(4 - x) \leq 0$ AND $2\cdot x - 3 < 0$

false

Das "Versagen" des Computers schadet aber nicht weiter (ja nützt sogar dem Verständnis dafür, wie DERIVE diese Zeile "versteht"), weil die laut Faktordarstellung auftretenden Ungleichungen sehr einfach sind. Zudem können die einzelnen Fälle parallel, also arbeitsteilig und zeitsparend, behandelt werden. Diese Strategie hat gegenüber den Äquivalenzumformungen einige Vorteile:

- Sie zielt auf standardisierte Darstellungen ab, ist somit systematischer und damit algorithmisch leichter erfaßbar,

- sie wird von DERIVE (Funktionen FACTOR und SIMPLIFY) besser unterstützt, obwohl man dabei zuweilen kleine taktische Tricks anwenden muß. So wird

$$\frac{x^2 - 2}{x} - 1 > 0$$

nach Aufruf von FACTOR ersichtlich nicht faktorisiert

$$\frac{x^2 - x - 2}{x} > 0$$

außer man nimmt die zugehörige Gleichung zu Hilfe und ersetzt zum Schluß wieder händisch das Gleichheitszeichen durch das ursprüngliche Relationszeichen:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x} = 0$$

$$\frac{(x + 1)\cdot(x - 2)}{x} = 0$$

$$\frac{(x + 1)\cdot(x - 2)}{x} > 0$$

- sie ist übersichtlicher (alle Bedingungen stehen explizit nebeneinander und erschweren so das Vergessen auf Voraussetzungen)

- sie ist ohne jede Einschränkung auf Produkte übertragbar - im Gegensatz zur Äquivalenzumformungsstrategie bei Bruchgleichungen, wo einmal mit dem als positiv, das andere Mal mit dem als negativ vorausgesetzten Nenner multipliziert wird. Die Äquivalenzumformungsstrategie liefert, übertragen auf die Produkt-Ungleichung

$(x-2)*(x-1,5)\le 2(x-1,5) \mid /(x-1,5)<0$
$x-2\ge 2$
$x\ge 4$ und $x<1,5$
$L_1=\{\}$

$(x-2)*(x-1,5)\le 2(x-1,5) \mid /(x-1,5)>0$
$x-2\le 2$
$x\le 4$ und $x>1,5$
$L_2=]1,5;4]$

$L=L_1\cup L_2=]1,5;4]$

eine Lösungsmenge, in der ersichtlich die Lösung 1,5 fehlt. Die Frage "Wo steckt der Fehler" sollte man den Schülern nicht ersparen!

- sie ist umkehrbar, erlaubt also "Umkehraufgaben" wie die folgende zu lösen:

Beschreibe das Intervall a)]1,5;4], b) [1,5;4] (1) durch eine Ungleichungskette, (2) durch eine einzige Ungleichung!

a) (1) $1,5<x\le 4$
(2) $(x-4)/(x-1,5)\le 0$

b) (1) $1,5\le x\le 4$
(2) $(x-4)*(x-1,5)\le 0$

Aufgaben wie (2) sind insofern wichtig, als Ungleichungs-Ketten von DERIVE (und auch anderen CAS) nicht unmittelbar verarbeitet werden! Ihre Lösung ist jedoch - obwohl aus der logischen Strukturierung (siehe das vorangehende Beispiel) direkt ablesbar - für Schüler ohne graphische Darstellung erfahrungsgemäß schwierig!

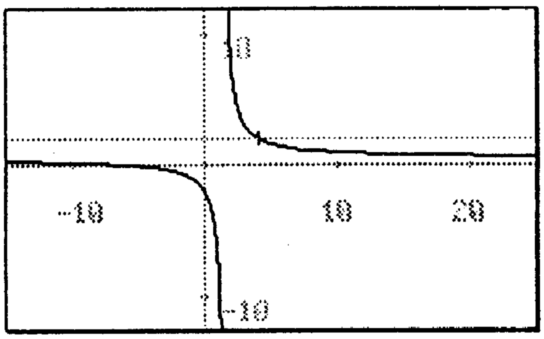
3) Die Strategie des graphischen Lösens

Ziele: Transfer des Gleichungslösen mit graphischen Mitteln auf Ungleichungen
Repertoire an Graphen und Transformationen üben und erweitern
Kurvendiskussion (Monotonie, Stetigkeit,...) vertiefen

Die Lösung der gegebenen Ungleichung kann unter Verwendung der beiden Funktionen

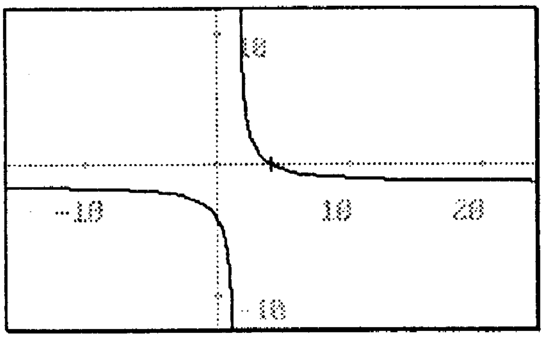
$$y = \frac{x + 6}{2 \cdot x - 3}$$

$$y = 2$$



erfolgen, oder durch eine einzige Funktion, nämlich

$$y = \frac{x + 6}{2 \cdot x - 3} - 2$$



Die "Vereinfachung" zu

$$y = \frac{3 \cdot (4 - x)}{2 \cdot x - 3}$$

bringt keinen Vorteil für das Zeichnen.

Anders hingegen die Umformung

$$\text{EXPAND}\left[\frac{x+6}{2\cdot x-3}\right]$$

$$\frac{15}{2\cdot(2\cdot x-3)}+\frac{1}{2}$$

$$3.75\cdot\frac{1}{x-1.5}+\frac{1}{2}$$

Diese Darstellung gestattet das händische Zeichnen bzw. Skizzieren des Graphen nach dem **Baukastenprinzip** in folgenden Schritten:

Bekannte Grundfunktion (Hyperbel) zeichnen
→ y=1/x
Verschieben des Graphen parallel zur x-Achse um 1,5 Einheiten nach rechts
→ y=1/(x-1.5)
Axiale Streckung des Graphen (Achse ist x-Achse, Streckfaktor ist 3.75)
→ y=3.75*(1/(x-1.5))
Verschieben des Graphen parallel zur y-Achse um 0,5 Einheiten nach oben
→ y=3.75*(1/(x-1,5))+1/2

Als Nachteil der graphischen Methode kann gelten, daß sie kaum arbeitsteilig organisierbar ist, sieht man davon ab, daß Schüler Teilgraphen auf Transparentpapier (übereinander-)zeichnen. Obwohl diese Art der **Schablonengeometrie** angesichts der guten Unterstützung durch DERIVE (Funktion PLOT) an Bedeutung verliert, ist sie didaktisch gesehen doch sehr wertvoll.

So "verführt" die obige Ungleichung

$$\frac{x^2-2}{x}>1$$

zur Umformung zu

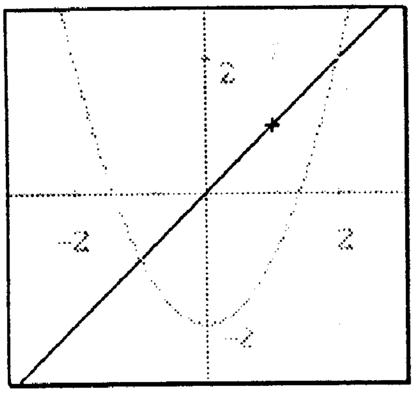
$$x^2-2>x$$

bzw.

$$x^2>x+2$$

weil hier die "Schablonen" für die Grundparabel y=x^2 bzw. die 1.Mediane bloß verschoben werden müssen.

Die zur ersten Umformung gehörige Zeichnung



zeigt die (vermeintliche) Lösung L=]-1;2[, obwohl doch 0 sicher keine Lösung ist. Wir sollten den Schülern die Frage "Wo steckt der Fehler" nicht ersparen!

Ein ganz entscheidender Vorteil gegenüber rechnerischen Verfahren besteht m.E. darin, daß man nicht nur die "Grenzen" des Lösungsbereiches sieht, sondern auch das Verhalten der Funktion vor bzw. nach diesen. So kann man etwa erkennen, ob eine geringfügige Änderung der unteren Grenze 2 im obigen Beispiel (um den Korrekturwert s) nach oben oder unten eine starke oder eine nur geringe Änderung des Lösungsbereiches bewirkt hätte.

Insofern geht die Strategie des graphischen Lösens über das "reine Lösen" im Sinne des bloßen Aufsuchens der Lösungsmenge hinaus und ist Vorbereitung für Fragestellungen, wie sie im Zuge der Differentialrechnung thematisiert werden.

4) Die Strategie des Ausgleichens mittels Schlupfvariabler

Ziele: Überführung einer Ungleichung in eine Gleichung mittels einer Schlupfvariablen
Rechnen mit Formvariablen üben und vertiefen
Grenzwerte, Restglieder, Fehlerrechnung, Optimierungsverfahren vorbereiten

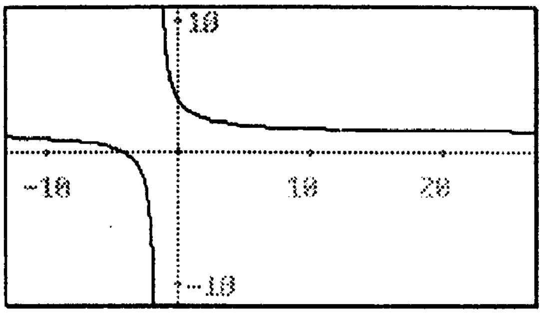
In Verallgemeinerung der obigen Idee mit dem Korrekturwert s kann die Ungleichung unter Verwendung der "Schlupf"-Variablen s in eine Gleichung umgeformt werden:

$$\mathrm{SOLVE}\left[\frac{x+6}{2\cdot x-3}=2+s,\ x\right]$$

$$\left[x=\frac{3\cdot(s+4)}{2\cdot s+3}\right]$$

Nunmehr ist - für die Schüler äußerst ungewohnt - x die abhängige Veränderliche und erscheint in der Graphik auf der senkrechten Achse, während s die unabhängige Variable ist und auf der waagrechten Achse aufgetragen wird. Der Definitionsbereich von s ist (hier) R^+, weil ja die rechte Seite der Ungleichung "zum Ausgleich" vergrößert werden mußte.

Das Schaubild der Funktion x(s)



läßt erkennen, daß die Lösungsmenge ein Intervall ist, dessen exakte Grenzen wie folgt berechnet werden können:

$$\lim_{s \to 0} \frac{3 \cdot (s + 4)}{2 \cdot s + 3}$$

$$4$$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{3 \cdot (s + 4)}{2 \cdot s + 3}$$

$$\frac{3}{2}$$

Obwohl der Formalismus der Grenzwertrechnung in der 5.Klasse (vom Lehrplan her noch) nicht zur Verfügung steht, läßt sich die Idee des Funktions-Grenzwertes hier anhand des Graphen oder durch Einsetzen "großer" Zahlen anstelle von unendlich (naiv) vorbereiten.

Der Vorteil dieses Verfahrens besteht vordergründig vor allem darin, die für CAS typischen mächtigen Werkzeuge zum Bearbeiten von Gleichungen auch für Ungleichungen nutzbar zu machen. Hintergründig handelt es sich bei dieser Strategie um eine der zentralen Ideen formalen Arbeitens schlechthin, die vom Ansetzen bei Gleichungen bei Textaufgaben bis zum Simplexalgorithmus, von Äquivalenzumformungen bis zu Restgliedern bei Reihen immer wieder ihre Wichtigkeit und Tragfähigkeit beweist

5. Resümee

Ersichtlich hat jede Strategie für sich Stärken und Schwächen, fordert andere Lernprozesse und andere typische Fehler heraus, ist Übung und Konsolidierung für andere bereits vermittelte Fertigkeiten und Kenntnisse, ist unabdingbare Voraussetzung oder Propädeutik für andere mathematische Themen. Das Entrümpeln von Ungleichungen bedeutet daher je nach dem, welche fundamentale Lösungsstrategie im Unterricht eingeschlagen bzw. favorisiert wird, ganz verschieden schwere Defizite für den weiteren Unterrichtsverlauf und letztlich für die mit der Matura angestrebte mathematische Bildung. Spätestens bei mangelnder Studierfähigkeit wird offenbar, daß Bildung mehr ist als kurzsichtig-utilitaristische Ausbildung für den Alltag.

Um - in Anlehnung an H.-Chr. REICHEL (1993, S.115) - mit einem Motto zu schließen: "Bildung äußert sich darin, über eine Vielzahl von Sichtweisen und Strategien verfügen zu können."

Verwendete Literatur:

HANISCH, G.: Wozu ist der Mathematikunterricht gut?
Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 23, Wien, 1995

REICHEL, H.-Ch., MÜLLER, R.,u.a.: Lehrbuch der Mathematik Bd.1
Verl. Hölder-Pichler-Tempsky Wien, 1989

REICHEL H.-Chr.: Bildung durch Mathematik. Aus: KÖHLER, H. und RÖTTEL, K. (Hrsg.): Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht, Buxheim-Eichstätt, 1993, S.113-126.

TASCHNER, R.: Ist die Mathematik noch zu retten
(Unveröffentlichter?) Vortrag, TU Wien 1995

Anschrift des Autors:
Dr. Robert Müller, Bundesrealgymnasium Wien 3, A-1030 Wien, Radetzkystr. 2a